Tentamenopgave[1]

I

1. Laat $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij over het interval (a,b) integreerbare functies zijn, zodat de limiet $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ bestaat voor alle $x \in (a,b)$. Geef een voorwaarde die de volgende twee eigenschappen tot gevolg heeft:

a. De functie f is integreerbaar over (a,b).

b. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$

2. Zij f integreerbaar over het interval $(0,+\infty)$. Toon aan dat $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} e^{-nx}f(x)dx = 0.$

3. Laat nu $\alpha < \beta$ en neem aan dat voor $t \in (\alpha,\beta)$ de functie $x \mapsto f(t,x)$ integreerbaar is over (a,b). Zij

$$F(t) = \int_a^b f(t,x)dx, \quad \alpha < t < \beta.$$

Geef voorwaarden waaronder F differentieerbaar is en

$$F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)dx, \quad \alpha < t < \beta.$$

4. Toon aan dat, voor $t > 0$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{t^2+x^2} = \frac{\pi}{t}$ en bereken zo $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(t^2+x^2)^2}$.

II

1. Toon aan, m.b.v. de theorie van Fourierreeksen, dat voor $|x| \le \pi$

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2}\dots\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos nx. \tag{1}$$

Aanwijzing: citeer de relevante stelling en bereken de Fouriercoëfficienten.

2. Is de convergentie van deze reeks uniform ?

3. Bereken m.b.v. (1) de som van de reeks $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2}\dots = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}$.

4. Geef de formule van Parseval, liefst in termen van de reële Fouriercoëfficienten. Bereken met behulp hiervan de som van de reeks $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4}\dots = \sum_{n \text{ oneven}}\frac{1}{n^4}$.

III

1. Geef de formules van Plancherel voor de Fouriertransformatie en voorwaarden waaronder deze geldig zijn.

2. Bewijs met behulp hiervan dat bij $\lambda > 0$ en $\mu > 0$ geldt:

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{dy}{(\lambda + 2\pi i y)(\mu - 2\pi i y)} = \frac{1}{\lambda+\mu}. \tag{2}$$

[1] De onderdelen I, II en III zijn onafhankelijk.